MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
D. Rost, J. Stelzig

WS 2019/20
Blatt 10
10.1.2020

Übungen zur Vorlesung „Grundlagen der Mathematik I“

1. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2002, Thema 3, Aufgabe 2)*
   Formulieren Sie das Prinzip der vollständigen Induktion und beweisen Sie damit die folgende Aussage:

   $$\text{Für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt } \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Beweisen Sie die folgenden Teilbarkeitsaussagen mittels Induktion nach n:

   a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $6 \mid (2n^3 + 3n^2 + n)$.

   b) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $8 \mid (3^{2n} + 7)$.

   c) Für alle $a \in \mathbb{N}$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(a^2 + a + 1) \mid (a^{n+1} + (a+1)^{2n-1})$.

3. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2005, Thema 3, Aufgabe 1)*
   Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion

   $$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

4. Zeigen Sie durch vollständige Induktion nach n:

   Ist M eine endliche Menge mit $|M| = n \in \mathbb{N}_0$, so ist $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

   (Hinweis für den Induktionsschluß $n \to n+1$: Für eine Menge M mit $|M| = n+1$ fixiert man ein beliebiges Element $x \in M$ und zeigt, daß es genau so viele Teilmengen von M gibt, die das Element x enthalten, wie Teilmengen, die es nicht *enthalten.)*

Abgabe bis 17.1.2020, 14:00 Uhr (Kasten vor der Bibliothek).